

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Пыгиев Хекимберди Рахымбердиевич

Преподаватель, Государственный энергетический институт Туркменистана
г. Мары Туркменистан

Ашыров Дидаргелди Овезгелдиевич

Студент, Государственный энергетический институт Туркменистана
г. Мары Туркменистан

Мухаммедов Юнус Мухаммедович

Студент, Государственный энергетический институт Туркменистана
г. Мары Туркменистан

Аннотация

В данной фундаментальной научно-теоретической, математической и прикладной исследовательской работе проводится глубокий, всесторонний и многоаспектный анализ современных методов математического и численного моделирования процессов теплопроводности в сплошных средах, неоднородных структурах и анизотропных материалах. В условиях активного развития энергетики, микроэлектроники, строительной индустрии и металлургического производства точное прогнозирование пространственно-временных температурных полей является ключевым условием обеспечения надежности, энергетической эффективности и физической безопасности инженерных систем.

В исследовании детально рассматриваются физико-математические постановки краевых задач теплопроводности, включая дифференциальные уравнения Фурье в частных производных для стационарных и нестационарных режимов, граничные условия I–IV родов, а также проблемы учета нелинейной зависимости коэффициентов теплопроводности и теплоемкости от температуры. Особое внимание уделено численным методам решения, таким как метод конечных разностей (МКР) с явными и неявными разностными схемами, метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных объемов (МКО). На основе алгоритмизации и проведения вычислительных экспериментов разработана и научно обоснована комплексная модель распределения тепловых потоков в многослойных конструкциях.

Ключевые слова: теплопроводность, математическое моделирование, уравнение Фурье, краевая задача, метод конечных элементов, метод конечных разностей, нестационарный теплоперенос, тепловой поток, граничные условия, вычислительные алгоритмы.

MODELING OF HEAT CONDUCTION PROCESSES

Hekimberdi Rahymberdiyevich Pyggyev

Teacher, State Energy Institute of Turkmenistan
Mary, Turkmenistan

Didargeldi Ovezgeldiyevich Ashyrov

Student, State Energy Institute of Turkmenistan
Mary, Turkmenistan

Yunus Muhammedovich Muhammedov

Student, State Energy Institute of Turkmenistan
Mary, Turkmenistan

Abstract

This fundamental scientific-theoretical, mathematical, and applied research paper presents a deep, comprehensive, and multi-aspect analysis of modern methods for mathematical and numerical modeling of heat conduction processes in continuous media, inhomogeneous structures, and anisotropic materials. Amid the active development of energy, microelectronics, construction industry, and metallurgical production, accurate prediction of spatiotemporal temperature fields is a key condition for ensuring the reliability, energy efficiency, and physical safety of engineering systems.

The study examines in detail the physical and mathematical formulations of boundary value problems of heat conduction, including Fourier partial differential equations for stationary and non-stationary regimes, boundary conditions of types I–IV, and issues of accounting for the non-linear temperature dependence of thermal conductivity and heat capacity. Special attention is paid to numerical solution methods, such as the finite difference method (FDM) with explicit and implicit schemes, the finite element method (FEM), and the finite volume method (FVM). Based on algorithmization and computational experiments, a comprehensive model of heat flux distribution in multilayer structures was developed and scientifically justified.

Keywords: heat conduction, mathematical modeling, Fourier equation, boundary value problem, finite element method, finite difference method, non-stationary heat transfer, heat flux, boundary conditions, computational algorithms.

ВВЕДЕНИЕ

Перенос тепловой энергии представляет собой один из фундаментальных физических процессов, определяющих функционирование как природных систем, так и многочисленных технических устройств. Теплопроводность как специфический механизм переноса энергии на микроскопическом уровне

осуществляется путем непосредственного взаимодействия микрочастиц (атомов, молекул, свободных электронов и фононов) в областях с различной температурой. В макроскопическом масштабе данный процесс приводит к сглаживанию температурных градиентов и перераспределению внутренней энергии тела.

Современный технический прогресс предъявляет высочайшие требования к точности тепловых расчетов. Проектирование высоконагруженных узлов в энергомашиностроении, оптимизация процессов застывания расплавов в металлургии, расчет тепловых режимов интегральных микросхем с высокой плотностью упаковочных элементов, а также энергоэффективное проектирование зданий невозможны без глубокого анализа процессов теплопроводности. Проведение прямых натурных экспериментов во многих случаях оказывается чрезвычайно дорогостоящим, трудоемким или физически нереализуемым ввиду экстремальных условий эксплуатации объектов. В этой связи математическое и компьютерное моделирование становится основным и наиболее эффективным инструментом анализа теплофизических процессов.

Математическое описание классической теплопроводности опирается на феноменологический закон Фурье, утверждающий, что плотность теплового потока прямо пропорциональна градиенту температуры и направлена в сторону ее наибольшего убывания.

Актуальность настоящего исследования обусловлена необходимостью системного обобщения математических методов анализа уравнения теплопроводности, оценки устойчивости и сходимости численных схем, а также создания универсальных алгоритмов расчета нестационарных температурных полей в сложных многомерных областях.

Главной целью работы является осуществление фундаментального математико-физического анализа процессов теплопроводности, построение эффективных численных алгоритмов их решения и демонстрация их применимости при решении прикладных инженерно-физических задач.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Методологический фундамент исследования базируется на положениях математической физики, дифференциального исчисления, вычислительной математики и линейной алгебры.

В общем трехмерном случае нестационарный процесс теплопроводности в анизотропной среде с внутренними источниками выделения тепла описывается дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) + q_v$$

Здесь $T = T(x, y, z, t)$ обозначает искомую температуру в точке с координатами (x, y, z) в момент времени t , ρ представляет плотность вещества, c_p — удельную изобарную теплоемкость, k — тензор коэффициентов теплопроводности среды, а q_v — объемную мощность внутренних источников тепла.

Для однозначного решения уравнений математической физики необходимо задание начальных и граничных условий, формирующих краевую задачу:

Начальные условия Определяют распределение температуры по всему объему исследуемого тела в начальный момент времени: $T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z)$.

Граничные условия первого рода (условия Дирихле) Задают значение температуры на поверхности тела как функцию времени и координат: $T_\Gamma = T_w(t)$.

Граничные условия второго рода (условия Неймана) Задают величину плотности теплового потока через границу тела: $(k \frac{\partial T}{\partial n})_\Gamma = q_w(t)$

где n — внешняя нормаль к поверхности.

Граничные условия четвертого рода Характеризуют условия идеального теплового контакта на границе раздела двух различных тел, предполагающие равенство температур и равенство плотностей тепловых потоков.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Получение точных аналитических решений уравнения теплопроводности возможно только для узкого класса задач в канонических областях простой геометрии и при постоянных теплофизических коэффициентах. При решении реальных прикладных задач с нерегулярной геометрией и нелинейными характеристиками материалов основным инструментом выступают численные методы.

Метод конечных разностей (МКР) основан на дискретизации непрерывной расчетной области сеткой узлов и замене производных разностными отношениями. При аппроксимации временной производной выделяют явные и неявные разностные схемы. Явная схема проста в алгоритмической реализации, однако обладает жестким ограничением на шаг по времени по условию Куранта–Фридрихса–Леви для обеспечения устойчивости расчета. Неявная схема абсолютно устойчива при любых шагах по времени, но требует решения системы линейных алгебраических уравнений на каждом временном шаге, что успешно реализуется методом прогонки (алгоритм Томаса) для одномерных задач или методом переменное-направленных разностей (ADI) для многомерных случаев.

Метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных объемов (МКО) обладают высочайшей универсальностью при аппроксимации сложных криволинейных границ. МКЭ разбивает область на неперекрывающиеся конечные элементы,

формируя аппроксимирующие функции внутри каждого элемента и приводя задачу к системе интегральных соотношений с использованием метода Галеркина. МКО обеспечивает точное выполнение закона сохранения энергии для каждого элементарного контрольного объема, что гарантирует абсолютную консервативность численной схемы.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ПРИКЛАДНЫЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Проведенный комплексный математический анализ и численное моделирование процессов теплопроводности позволяют обсудить ключевые особенности применения рассмотренных методов в инженерной практике.

Центральным дискуссионным вопросом вычислительной теплофизики является проблема учета температурной зависимости теплофизических свойств материалов. В реальных условиях коэффициенты теплопроводности и теплоемкости металлов, полупроводников и строительных композитов существенно изменяются при нагреве, превращая линейное уравнение теплопроводности в нелинейное. В исследовании показано, что применение преобразования Кирхгофа позволяет свести нелинейную задачу теплопроводности без внутренних источников к линейному виду относительно новой потенциальной функции, что значительно ускоряет сходимость численных алгоритмов.

Вторым дискуссионным аспектом выступает моделирование процессов фазовых переходов, связанных с выделением или поглощением скрытой теплоты плавления и кристаллизации (задача Стефана). В работе обоснована эффективность использования метода эффективной теплоемкости, при котором скрытая теплота фазового перехода учитывается дельта-образным пиком в функциональной зависимости удельной теплоемкости от температуры в узком интервале фазового превращения.

Третий важный аспект касается анализа микро- и наномасштабной теплопроводности в элементах современной полупроводниковой микроэлектроники. При масштабах характерных размеров приборов, сопоставимых со средней длиной свободного пробега фононов, классический закон Фурье нарушается, и возникает необходимость перехода к гиперболическим уравнениям теплопроводности (модель Максвелла–Каттанео–Вернотта) или решению уравнения переноса Больцмана для фононов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное глубокое комплексное исследование моделирования процессов теплопроводности позволяет сделать следующие основные выводы. Математическое моделирование теплопроводности представляет собой эффективный и фундаментально обоснованный метод анализа температурных

режимов в объектах любой степени сложности. Использование численных методов, таких как метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод конечных объемов, позволяет с высокой точностью рассчитывать пространственно-временные температурные поля с учетом нелинейностей и сложных граничных условий. Учет фазовых превращений, температурных зависимостей характеристик материалов и масштабно-временных эффектов расширяет границы применимости классических моделей теплопереноса. Разработанные математические модели и вычислительные алгоритмы создают надежный научный базис для инженерного проектирования высокоэффективных теплообменных аппаратов, систем теплозащиты и электроники нового поколения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности. В 2-х ч. М.: Высшая школа, 1982. Ч. 1. 327 с.
2. Дульнев Г. Н. Теория тепломассообмена. СПб.: ИТМО, 2012. 195 с.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
5. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2002. 784 с.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
7. Patankar S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980. 197 p.
8. Incropera F. P., DeWitt D. P., Bergman T. L., Lavine A. S. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007. 1081 p.
9. Ozisik M. N. Heat Conduction. New York: John Wiley & Sons, 1993. 692 p.
10. Lewis R. W., Nithiarasu P., Seetharamu K. N. Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Mass Transfer. Chichester: John Wiley & Sons, 2004. 356 p.

REFERENCES

1. Belyaev N.M., Ryadno A.A. (1982). Metody teorii teploprovodnosti [Methods of Heat Conduction Theory]. In 2 parts. Moscow: Vysshaya Shkola Publ. Part 1. 327 p.
2. Dulnev G.N. (2012). Teoriya teplomassoobmena [Theory of Heat and Mass Transfer]. Saint Petersburg: ITMO Publ. 195 p.
3. Carslaw H.S., Jaeger J.C. (1964). Teploprovodnost tverdykh tel [Conduction of Heat in Solids]. Moscow: Nauka Publ. 488 p.
4. Lykov A.V. (1967). Teoriya teploprovodnosti [Theory of Heat Conduction]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ. 600 p.
5. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. (2002). Vychislitelnaya teploperedacha [Computational Heat Transfer]. Moscow: Editorial URSS. 784 p.
6. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. (1999). Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: MSU Publ. 798 p.

7. Patankar S.V. (1980). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation. 197 p.
8. Incropera F.P., DeWitt D.P., Bergman T.L., Lavine A.S. (2007). Fundamentals of Heat and Mass Transfer. Hoboken: John Wiley & Sons. 1081 p.
9. Ozisik M.N. (1993). Heat Conduction. New York: John Wiley & Sons. 692 p.
10. Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N. (2004). Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Mass Transfer. Chichester: John Wiley & Sons. 356 p.